E-ISSN : 2541-0253
Vol. 6 No.1 Juni 2021

Jurnal Mutiara Pendidikan Indonesia
Avalilable Online http://e-journal.sari-mutiara.ac.id/index.php/JMT
DOI https://doi.org/10.51544/mutiara%20pendidik.v6i1.1907

PENENTUAN GALAT PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA ORDE 1 DENGAN METODE NUMERIK

Wajib Pandia[1], Israil Sitepu[2]
[1]Prodi Pendidikan Matematika, Universitas Quality Medan
E-mail: wajibpandia957@gmail.com
[2]Prodi Biologi, Universitas Hindu Indonesia Denpasar
E-mail: israil63@gmail.com

Received: Januari 2021; Accepted: April 2021; Published: Juni 2021

ABSTRAK

Metode numerik dapat menangani sistem persamaan besar, ketidaklinieran, dan geometri yang rumit dalam praktek rekayasa yang seringkali tidak mungkin dipecahkan secara analitik. Perhitungan dengan metode numerik merupakan perhitungan yang dilakukan secara berulang-ulang untuk terus-menerus memperoleh hasil yang semakin mendekati nilai penyelesaian sebenarnya.Persamaan diferensial biasa merupakan salah satu masalah yang dapat diselesaikan dengan metode numerik. Ada empat metode yang dapat digunakan dalam menentukan galat persamaan diferensial biasa, yaitu metode Deret Taylor, metode Runge-Kutta, metode Heun, dan metode Euler.Penelitian ini merupakan penelitian yang berjenis kepustakaan atau literature yang bertujuan mengumpulkan data-data dan informasi melalui buku dan jurnal. Tujuan penelitian ini untuk mengetahui metode terbaik untuk menentukan galat persamaan diferensial biasa.Berdasarkan soal yang diselesaikan dalam menentukan galat persamaan diferensial menggunakan metode Deret Taylor, metode Runge-Kutta, metode Heun dan metode Euler, metode yang menghasilkan galat paling kecil adalah metode Runge-Kutta.
Kata kunci: Metode Numerik, Menentukan Galat Persamaan Diferensial Biasa

ABSTRACT

Numerical methods can handle systems of large equations, nonlinearities, and complicated geometries in engineering practice thatoften impossible to solve analytically. Calculations in numerical methods are calculations that are done repeatedly to get continuously obtain results that are getting closer to the actual settlement value.Ordinary differential equations are one of the problems that can be solved by numerical methods. There are four methods that can be used in determining ordinary differential equation errors, namely the Taylor Series method, the Runge-Kutta method, the Heun method, and the Euler method.This research is a type of literature research that aims to collect data and information through books and journals. The purpose of this study is to find out the best method for determining ordinary differential equation errors.Based on the problem solved in determining the differential equation error using the Taylor Series method, the Runge-Kutta method, the Heun method and the Euler method, the method that produces the smallest error is the Runge-Kutta method.
Keywords: Numerical Method, Determining Ordinary Differential Equation Errors

PENDAHULUAN

Latar Belakang Masalah

Matematika merupakan salah satu ilmu dasar dalam dunia pendidikan yang digunakan untuk menunjang ilmu-ilmu lain seperti ilmu fisika, kimia, komputer, dan lain-lain. Matematika bukan hanya alat bantu untuk matematika itu sendiri, tetapi banyak konsep-konsepnya yang sangat diperlukan oleh ilmu lainnya. Matematika juga memegang peranan penting dalam kehidupan manusia.

Kebermaknaan konsep-konsep matematika tampak jelas ketika digunakan dalam memecahkan masalah sains, teknologi dan kehidupan sehari-hari.

Haryono (2014: 6) menyatakan bahwa, banyak filsuf telah menggunakan matematika untuk membangun teori pengetahuan dan penalaran yang dihasilkan dengan memanfaatkan bukti-bukti matematika dianggap telah dapat menghasilkan suatu pencapaian yang memuaskan. Matematika telah menjadi sumber inspirasi yang utama bagi para filosof untuk mengembangkan epistemology dan metafisik.

Matematika merupakan ilmu universal yang mendasari perkembangan teknologi modern, mempunyai peranan penting dalam berbagai displin dan mengembangkan daya pikir manusia. Struktur spesifik yang diselidiki oleh matematika sering kali berasal dari ilmu pengetahuan alam termasuk didalamnya biologi, akan tetapi yang paling umum berasal dari fisika (Hasratuddin, 2015: 35).Peranan matematika sebagai alat dalam menyelesaikan berbagai masalah sangat penting. Kebanyakan masalah ini dimodelkan dengan menggunakan suatu sistem persamaan diferensial.

Persamaan diferensial merupakan persamaan fungsi turunan yang ada dalam permasalahan matematika. Persamaan diferensial merupakan persamaan yang menyangkut turunan dari suatu lebih variabel tak bebas. Berdasarkan jumlah variabel bebasnya, persamaan diferensial dikelompokkan menjadi persamaan diferensial biasa (PDB) dan persamaan diferensial parsial (PDP). Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang memuat turunan terhadap fungsi yang memuat satu variabel bebas(Setiawan, 2006: 193).

Penyelesaian persamaan diferensial biasa mempunyai dua cara yaitu dengan menggunakan metode analitik dan metode numerik. Metode analitik disebut juga metode sejati karena memberikan solusi sejati atau solusi sesungguhnya. Metode numerik digunakan ketika suatu persoalan matematika tidak mampu diselesaikan dengan menggunakan metode analitik. Metode numerik memiliki pengertian yakni teknik-teknik yang digunakan untuk merumuskan masalah-masalah matematika agar dapat diselesaikan dengan operasi-operasi aritmatika (hitungan) biasa (tambah, kurang, kali, dan bagi). Terdapat beberapa metode numerik yang digunakan untuk menghitung solusi PDB, yaitu metode Deret Taylor, metode Runge-Kutta, metode Heun dan metode Euler.

Metode Deret Taylor merupakan bentuk dari fungsi matematika sebagai jumlahan tak hingga dari suku yang nilainya dihitung dari turunan fungsi tersebut pada suatu titik. Salah satu fungsi deret Taylor adalah memberikan solusi hampiran dari suatu fungsi $f(x)$ dalam bentuk polynomial, sehingga nilai penyelesaian pada suatu fungsi dapat diperoleh pendekatannya. Metode Runge-Kutta adalah alternatif lain dari metode deret Taylor. Metode ini berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang lebih tinggi, dan sekaligus menghindarkan keperluan mencari turunan yang lebih tinggi dengan jalan mengevaluasi fungsi f(x,y). Metode Heun merupakan perbaikan metode Euler. Metode Euler merupakan metode paling sederhana yang diturunkan dari deret Taylor.

Sesuai dengan latar belakang inilah penulis merasa tertarik mengambil judul: **PENENTUAN GALAT PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA ORDE 1DENGAN METODE NUMERIK**

Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana menentukan galat persamaan diferensial biasa orde 1 secaranumerik

Tujuan Penulisan

Tujuan penelitian ini untuk mengetahui galat terkecil persamaan diferensial biasa orde 1 secara numerik.

TINJAUAN PUSTAKA

Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial (PD) adalah suatu persamaan yang mengandung fungsi dan turunan.Persamaan diferensial adalah suatu relasi yang menyangkut satu atau lebih turunan dari sebuah fungsi yang tak diketahui dan mungkin fungsi itu sendiri (Maya dan Rachmawati, 2018:1). Persamaan diferensial adalah persamaan yang menyangkut turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas (Ross, 1984: 3). Persamaan diferensial yang melibatkan (x, y, turunannya) dapat dinyatakan dalam bentuk:F(x,y,y',y'',…,$y^{(n)}$) = 0 dengan $y^{(n)}$ merupakan turunan ke-n dari *y* terhadap *x* (Piskunov, 1974:14). Persamaan diferensial biasa (PDB) adalah persamaan diferensial yang menyangkut turunan biasa dari satu atau lebih variabel bebas terhadap satu variabel terikat (Ross, 1984: 4).

PDB orde 1, yaitu PDB yang turunan tertingginya adalah turunan pertama.

Contoh: $x\frac{dy}{dx} - y^2 = 0$

Penyelesaian PDB dibagi dua yaitu:

1. Penyelesaian Umum (PU): Penyelesaian PDB yang masih mengandung konstanta sebarang misalnya c.
2. Penyelesaian Khusus (PK): Penyelesaian yang tidak mengandung konstanta variabel karena terdapat syarat awal pada suatu persamaan diferensial biasa.
   Contoh:
   PD: y''– y' – 2y = 0
   PU: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$
   Jika c_1 dan c_2 masing-masing diberi harga $c_1 = 2$ dan $c_2 = 1$, maka PK: $y = 2e^{-x} + e^{2x}$

PDB orde satu ditulis dalam bentuk persamaan:

1. F(x,y)dy + G(x,y)dx = 0
2. $\frac{dy}{dx} = Py^2 + Qy + R$
3. $f(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$

Metode Penyelesaian Persamaan Diferensial

Metode Deret Taylor

Metode deret Taylor adalah suatu metode pendekatan yang menggunakan deret Taylor sebagai bentuk perbaikan nilai untuk nilai fungsi secara keseluruhan pada penyelesaian persamaan diferensial. Deret Taylor digunakan untuk menghampiri fungsi ke dalam bentuk polinom. Fungsi yang rumit menjadi sederhana dengan deret Taylor.Diberikan fungsi f dan semua turunannya, $f', f'', f''', \cdots, f^n$ di dalam selang [a,b]. Misalkan $x_0 \in [a,b]$, maka untuk nilai-nilai x di sekitar x_0 dan $x \in [a,b], f(x)$ dapat diperluas (diekspansi) kedalam deret Taylor:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{f'(x_i)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_i)}{2!}\Delta x^2 + \cdots + \frac{f^n(x_i)}{n!}\Delta x^n ; \Delta x = h = x - x_0 ; y = f(x)$$

Munir,2010, 379)

Metode Runge-Kutta

Metode ini dikembangkan sekitar tahun 1900 oleh matematikawan Jerman Carl Runge Wilhelm Kutta.Metode Runge Kutta adalah alternatif lain dari metode deret taylor yang tidak membutuhkan perhitungan turunan. Metode ini berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang lebih tinggi, namun dengan cara yang sederhana. Metode Runge Kutta mencapai ketelitian suatu pendekatan deret taylor tanpa memerlukan kalkulai turunan yang lebih tinggi. Banyak perubahan terjadi, tetapi semuanya dapat ditampung dalam bentuk umum dari persamaan:

$$y_{i+1} = y_i + \Phi(x_i, y_i, h)h$$

Dengan $\Phi(x_i, y_i, h)h$ adalah fungsi pertambahan yang menggambarkan kemiringan pada interval. Fungsi pertambahan tersebut ditulis dalam bentuk umum:

$$\Phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n$$

Dengan a_1, a_2 , …, a_n adalah tetapan, dan *k* adalah:
$k_1 = f(x_i, y_i)$; $k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h)$; $k_3 = f(x_i + p_2h, y_1 + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h)$
$k_n = f(x_i + p_{n-1}h, y_1 + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + \ldots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h)$

Ada beberapa tipe metode Runge Kutta yang tergantung pada nilai *n* yang digunakan.

Metode Runge Kutta orde satu :
$\Phi = a_1k_1 = a_1 f(x_i, y_i)$

Metode Runge Kutta orde dua:
$y_{i+1} = y_i + (a_1k_1 + a_2k_2)$ dengan :
$k_1 = f(x_i, y_1); k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h)$
Metode Runge Kutta orde tiga:
$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$ dengan :
$k_1 = f(x_i, y_i); k_2 = f(x_1 + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h);$
$k_3 = f(x_i + h, y_i - k_1h + 2k_2h)$
Metode Runge Kutta orde empat:
$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ dengan:
$k_1 = hf(x_i, y_i); k_2 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1);$
$k_3 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2);$
$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$
Bentuk umum metode Runge-Kutta orde n:
$\Phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n$ dengan:
$k_1 = f(x_i, y_i)$; $k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h)$; $k_3 = f(x_i + p_2h, y_1 + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h)$
$k_n = f(x_i + p_{n-1}h, y_1 + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + \ldots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h)$(Hasanah, 2009).

Metode Heun

Prosedur untuk menghitung solusi numerik untuk masalah nilai awal:
$y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$, dengan cara metode Heun, pertama menghitung nilai antara $\hat{y}_{i+1}$ dan kemudian perkiraan akhir y_{i+1} pada titik integrasi berikutnya.

$\hat{y}_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$;
$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \hat{y}_{i+1})$. dimana *h* adalah ukuran langkah dan $t_{i+1} = t_i + h$

Pada metode Heun, solusi dari metode Euler dijadikan sebagai solusi perkiraan awal (*predictor*). Selanjutnya solusi perkiraan awal ini diperbaiki dengan menggunakan metode Heun (*corrector*)(Yeremia, 2016. hal.2).
Formula Heun:
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})$$
dengan:i=0,1,2,…,n; y_{i+1}= hampiran sekarang; y_i= hampiran sebelumnya; *h* = ukuran langkah. Nilai dari y_{i+1} merupakan solusi perkiraan awal (*predictor*) yang dihitung dengan metode Euler, persamaan Heun dapat ditulis:
$\mathrm{Pr}\,edictor: y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(t_i, y_i)$
$Coreector:$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1}^{(0)})$$
(Oktaviani,dkk, 2014:33).

Metode Euler

Metode Euler adalah salah satu metode satu langkah yang paling sederhana. Dibanding dengan beberapa metode lainnya, metode ini paling kurang teliti. Namun demikian metode ini perlu dipelajari mengingat kesederhanaannya dan mudah pemahamannya sehingga memudahkan dalam mempelajari metode lain yang lebih teliti. Misalnya diberikan PDB orde 1, $y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$ dan nilai awal $y(x_0)=x_0$. Misalkany_r = y $x_r$adalah hampiran nilai di x_r yang dihitung dengan metode Euler. Dalam hal ini$x_r = x_0 + rh$; r = 1,2,3,…,n. Metode Euler diturunkan dengan cara menguraikan $y(x_{r+1})$ di sekitar x_r hasilnya diperoleh:
$y(x_{r+1}) = y(x_r) + hf(x_r, y_r); r = 0,1,2,\cdots, n$
atau dapat ditulis $y_{r+1} = y_r + hf_r$
(Munir,2010, 367)

GALAT

Galat atau error atau dalam keseharian disebut kesalahan. Galat atau error dapat juga didefinisikan sebagai selisih dari nilai atau hasil yang kita harapkan terjadi dengan observasi atau kenyataan yang terjadi di lapangan (Ermawati, dkk, 2017:17). Galat dapat berfungsi untuk menunjukkan efisiensi dari satu jenis percobaan atau penelitian ke penelitian yang lain. Secara normal, kita menginginkan galat yang bernilai kecil bahkan tidak terjadi galat. Namun ketiadaan galat juga dapat menyebabkan pertanyaan dalam penelitian kita. Menganalisis galat sangat penting di dalam perhitungan yang menggunakan metode numerik. Galat berasosiasi dengan seberapa dekat solusi hampiran terhadap solusi sejatinya. Semakin kecil galatnya, semakin teliti solusi numerik yang didapatkan. Misalkan $\hat{a}$ adalah nilai hampiran terhadap nilai sejati a, maka selisih $\varepsilon = a - \hat{a}$ disebut galat(Maharani, 2018:10).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Penyelesaian Persamaan Diferensial Dengan Metode Taylor

Diketahui PDB: $\frac{dy}{dx} = x + y; y(0) = 1$ .Hitung y (0.2) dengan matode Taylor $\Delta x = 0{,}1$

Penyelesa

$$y' = x + y$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(x+y) = 1 + y' = 1 + x + y$$

Masukkan ke dalam deret Taylor

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{f'(x_i)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_i)}{2!}\Delta x^2$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \Delta x(x+y) + \frac{\Delta x^2}{2!}(1+x+y)$$

$$f(x=0{,}1) = 1 + (0{,}1)(0+1) + \frac{(0{,}1)^2}{2!}(1+0+1)$$

$$f(x=0{,}1) = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 = 1{,}11$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \Delta x(x+y) + \frac{\Delta x^2}{2!}(1+x+y)$$

$$f(x=0{,}2) = 1{,}11 + (0{,}1)(0{,}1+1{,}11) +$$

$$\frac{(0{,}1)^2}{2!}(1+0{,}1+1{,}11) = 1{,}242$$

Penyelesaian Persamaan Diferensial Dengan Metode Runge-Kutta

Diketahui PDB: $\frac{dy}{dx} = x + y; y(0) = 1$.

Hitung y (0.2) dengan matode Runge-Kuttaordeempat, h = 0,2

Penyelesaian : $y(0) = 1$; $f(x_r, y_r) = x + y$

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = 0{,}2(0+1) = 0{,}2$$

$$k_2 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_2 = (0{,}2)[f(0+0.1{,}1+0{,}1)]$$

$$k_2 = (0{,}2)(0{,}1+1{,}1) = 0{,}24$$

$$k_3 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_3 = 0{,}2[f(0+0.1{,}1+0{,}12)]$$

$$k_3 = 0{,}2(0{,}1+1{,}12) = 0{,}244$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3)$$

$$k_4 = 0{,}2[f(0+0.2{,}1+0{,}244)]$$

$$k_4 = 0{,}2(0{,}2+1{,}244) = 0{,}2888$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y_{0,2} = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y_{0,2} = 1 + \frac{1}{6}[0{,}2 + 2(0{,}24) + 2(0{,}244) + 0{,}2888]$$

$$y_{0,2} = 1{,}2428$$

Penyelesaian Persamaan Diferensial Dengan Metode Heun

Diketahui PDB: $\frac{dy}{dx} = x + y; y(0) = 1$.

Hitung y (0.2) dengan matode Heun.h=0,1

Penyelesaian : $f(x_r, y_r) = x + y$

$$\hat{y}_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})$$

$\Pr ediktor:$

$$\hat{y}(0{,}1) = f(0) + 0{,}1(0+1) = 1 + 0{,}1 = 1{,}1$$

$Untuk\, x = 0{,}1$

$$f(0{,}1) = f(0) + 0{,}1\frac{(1+1{,}1)}{2} = 1{,}105$$

$\Pr ediktor:$

$$\hat{y}(0{,}2) = f(0{,}1) + 0{,}1(0{,}1 + 1{,}105)$$
$$= 1.105 + 0{,}0601 = 1{,}1652$$

$Untuk\, x = 0{,}2$

$$f(0{,}2) = f(0{,}1) + 0{,}1\frac{(1{,}105 + 1{,}1652)}{2}$$
$$= 1{,}105 + 0{,}1135 = 1{,}2185$$

Penyelesaian Persamaan Diferensial Dengan Metode Euler

Diketahui PDB: $\frac{dy}{dx} = x + y; y(0) = 1$.

Hitung y (0.2) dengan matode Euler. h=0,1

Penyelesaian :

$f(x_r, y_r) = x + y$; $y_{r+1} = y_r + hf_r$

$Untuk\, x = 0{,}1$

$$f(0{,}1) = f(0) + 0{,}1(0+1) = 1 + 0{,}1 = 1{,}1$$

$Untuk\, x = 0{,}2$

$$f(0{,}2) = f(0{,}1) + 0{,}1(0{,}1 + 1{,}1)$$
$$= 1{,}1 + 0{,}12 = 1{,}22$$

Penyelesaian Persamaan Diferensial Dengan Metode Analitik

Diketahui PDB: $\frac{dy}{dx} = x + y; y(0) = 1$.

Hitung y (0.2) dengan matode Analitik.

Penyelesaian :

$$\frac{dy}{dx} - y = x$$
$$y = uv$$
$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$
$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} - uv = x$$

$$u(\frac{dv}{dx} - v) + v\frac{du}{dx} = x$$
$$\frac{dv}{dx} - v = 0; v\frac{du}{dx} = x$$

$$\frac{dv}{dx} - v = 0$$
$$\frac{dv}{v} = dx$$
$$\int \frac{dv}{v} = \int dx$$
$$\ln v = x$$
$$v = e^x$$
$$v\frac{du}{dx} = x$$
$$e^x \frac{du}{dx} = x$$
$$du = e^{-x} x dx$$
$$\int du = \int e^{-x} x dx$$
$$u = -xe^{-x} - e^{-x} + c$$
$$y = uv$$
$$= (-xe^{-x} - e^{-x} + c)(e^x)$$
$$= -x - 1 + ce^x$$
$$y(0) = 1$$
$$1 = 0 - 1 + c$$
$$c = 2$$
$$y = -x - 1 + 2e^x$$
$$y(0{,}2) = -0{,}2 - 1 + 2e^{0{,}2}$$
$$= 1{,}242805516$$

PEMBAHASAN

Perbandingan galat untuk ke empat metode:

1. Metode Deret Taylor = 1,242
2. Metode Runge Kutta = 1,2428
3. Metode Heun = 1,2185
4. Metode Euler = 1,22

   Nilai Eksak = 1,242805116

   Dari keempat hasil penyelesaian persamaan diferensial tersebut, maka dapat ditarik kesimpulan bahwa galat yang terkecil adalah pada penyelesaian persamaan diferensial dengan metode Runge Kutta (Munir,2010,415)

SIMPULAN DAN SARAN

Simpulan

Berdasarkan penyelesaian persamaan diferensial didapat hasil sebagai berikut:

1. Penyelesaian persamaan diferensial dengan metode deret Taylor = 1,242
2. Penyelesaian persamaan diferensial dengan metode Runge-Kutta = 1,2428
3. Penyelesaian persamaan diferensial dengan metode Heun = 1,2185
4. Penyelesaian persamaan diferensial dengan metode Euler = 1,22

   Dari keempat hasil penyelesaian persamaan diferensial tersebut, maka dapat ditarik kesimpulan bahwa galat yang terkecil adalah pada penyelesaian persamaan diferensial dengan metode Runge Kutta.

Saran

Saran kepada penelitilain yang akan mengadakan penelitian tentang penentuan galat persamaan diferensial dengan metode numerik menggunakan metode Runge Kutta, karena galat yang dihasilkan oleh metode Runge Kutta lebih kecil dibandingkan dengan galat yang dihasilkan oleh metode Deret Taylor, metode Heun dan metode Euler.

DAFTAR PUSTAKA

Ernawati, dkk. 2017. *Perbandingan Solusi Numerik Integral Lipat Dua Pada Fungsi Fuzzy Dengan Metode Romberg Dan Simulasi Monte Carlo Jurnal Msa Vol. 5 No. 2 Ed*

Haryono, Didi. 2014. *Filsafat Matematika Suatu Tinjauan Epistemologi dan Filosofis*. Bandung. Alfabeta.

Hasanah, Inayatul. 2009. *Solusi Analitik dan Solusi Numerik Persamaan Chaucy-Euler*. Malang: Universitas Negeri Malang.

Hasratuddin. 2015. *Mengapa Harus Belajar Matematika?*. Medan: Perdana Publising.

Maharani, Swasti dan Suprapto, Edy. 2018. *Analisis Numerik Berbasis Group Investigion Untuk Meningkatkan Kemampuan Berpikir Kritis*. Jawa Timur: CV. AE Media Grafika.

Maya Kurniawati, Anggita dan Rachamawati, Yunita. 2018. *Persamaan Diferensial Linier Tak Homogen*. Yogyakarta: Universitas PGRI Yogyakarta Vol.IV No. 1.

Munir,R. 2010. *MetodeNumerik*. Bandung: Informatika.

Oktaviani, Rizka, dkk. 2014. *Penyelesaian Numerik Sistem Persamaan Difrensial Non Linier Dengan metode Heun pada Model Lotka Voltera*. Bulletin Ilmiah Mat. Stat dan Terapannya. Vol. 3 No.1

Piskunov, N. 1974. *Differential and Integral Calculus vol. II*. MIR Publishers. Moscow.

Ross, Shepley L. 1984. *Differensial Equantions*. Third Edition. New York: John Wiley & Sons.Inc.

Setiawan, A. 2006. *Pengantar Metode Numerik*. Yogyakarta: Andi.

Yeremia Wijaya, Jayme. *Perbandingan Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa Menggunakan Metode Backpropagation, Euler, Heun, dan Runge-Kutta Orde 4*. Jurnal Telematika Vol. 11 No. 1. Institut Harapan Bangsa, Bandung. ISSN: 1858-2516.